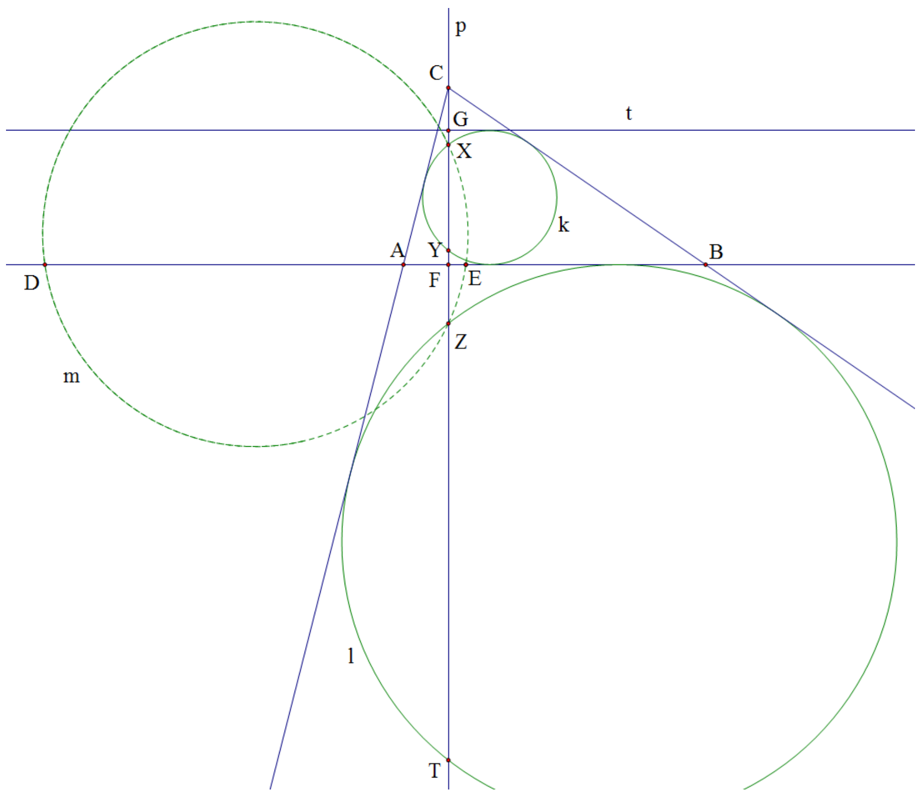
16. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. и 2. април 2022. године

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Први дан

1. Нека је F подножје нормале из тачке C на AB. Како је F на дужи XZ, то је њена потенција у односу на m негативна, па се F налази између D и E и важи $FX \cdot FZ = FE \cdot FD$. Уколико би доказали да је $FY \cdot FT = FX \cdot FZ$, онда би важило $FE \cdot FD = FY \cdot FT$, па како је F између D и E, односно између Y и T, непосредно следи тврђење задатка.



Докажимо сада да је $FY \cdot FT = FX \cdot FZ$, односно да је $\frac{FZ}{FT} = \frac{FY}{FX}$. $(*)$ Нека је t тантента кружнице k која је паралелна са AB (и различита од AB) и нека сече p у тачки G. Хомотетијом, која слика k у l, тачке G, X и Y, редом, се пресликавају у тачке F, Z и T, па важи $\frac{GX}{FZ} = \frac{GY}{FT}$, односно $\frac{FZ}{FT} = \frac{GX}{GY}$. Одавде, с обзиром да очигледно važe једнакости $GX = FY$ и $GY = FX$, следи једнакост $(*)$, чиме је доказ комплетиран.

2. Како су дати бројеви позитивни и $(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} > 3$, јасно је да су имениоци разломака који се појављују позитивни. Стога, проблем је еквивалентан са

$$9 \leqslant \frac{3}{3-2a} + \frac{3}{3-2b} + \frac{3}{3-2c} = 1 + \frac{2a}{3-2a} + 1 + \frac{2b}{3-2b} + 1 + \frac{2c}{3-2c} = 3 + 2\left(\frac{a}{3-2a} + \frac{b}{3-2b} + \frac{c}{3-2c}\right),$$

тј. са

$$\frac{a}{3-2a} + \frac{b}{3-2b} + \frac{c}{3-2c} \geqslant 3.$$

Међутим, ово следи сабирањем ове

$$\frac{a}{3-2a} = \frac{a^3}{(3-2a)\cdot a\cdot a} \geqslant \frac{a^3}{\left(\frac{3-2a+a+a}{3}\right)^3} = a^3$$

и аналогних неједнакости $\frac{b}{3-2b} \geqslant b^3$, $\frac{c}{3-2c} \geqslant c^3$, чиме је доказ завршен.

3. Попуњавајмо редом бројеве од најмањег до највећег, док не комплетирамо ред или колону. Нека је, не умањујући општост, реч о реду. Тај ред мора бити уз ивицу табеле (табле), иначе већи бројеви неће бити спојени. Обојимо све до тада комплетиране бројеве у плаво. Исто чинимо од највећег ка најмањем броју и тиме добијамо да први ред или колона, који ћемо комплетирати, ће управо бити супротан ред. Обојимо ове бројеве у црвено, а све до сад необојене бројеве у црно. Очигледно, идући од најмањег до највећег броја, прво ће бити попуњени плави, па црни, па црвени бројеви.

Доказаћемо да има барем $n-2$ црних бројева. Нека је омотач неког скупа поља скуп свих поља, изван тог скупа, који су суседи неком пољу унутар скупа. Очигледно омотачи скупова бројева $1, 2, \ldots, k$ као и $k, k+1, \ldots, n^2$, за свако k, могу имати највише n бројева, иначе ће постојати пар бројева са разликом већом од n. Приметимо да највећи плави и најмањи црвени број морају бити у ћошковима. Ако су у суседним ћошковима, онда већ у старту постоје $n-2$ црна броја између ова два ћошка. Иначе, посматрајмо омотач пре постављања последњег плавог броја. У свакој колони треба да буде барем један број из скупа омотача и ако је разлика у броју плавих бројева у суседним колонама већа од 1, биће у једној од тих колона више од једног броја у омотачу, што је немогуће. Следи да је пре постављања последњег плавог броја, број плавих бројева највише $1+2+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$, те је укупан број плавих бројева највише $\frac{n(n-1)}{2}+1$. Слично се добија да је и број црвених бројева највише $\frac{n(n-1)}{2}+1$, одакле закључујемо да је број црних барем $n^2-n(n-1)-2 = n-2$. Тиме је претходно тврђење доказано.

Сада погледајмо омотач од плавих бројева. У свакој колони се налази један број омотача, те омотач има укупно n бројева. С обзиром да има n бројева суседних са бројевима омотача у истој колони, следи да омотач мора редом да се пуни тако да разлика са бројем у истој колони буде n, дајући нам n добрих парова. Слично добијамо n добрих парова између црвених бројева и њиховог омотача. Како црних бројева има барем $n-2$, следи да ће бити највише 2 случаја преклапања између ова два скупа n добрих парова, па ће бити барем $2n-2 = 2(n-1)$ добрих парова. Наравно, једнакост се може добити ако се табела редом попуњава по међусобно паралелним дијагоналама.

16. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. и 2. април 2022. године

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Други дан

4. Прво решење: Нека са A_d означимо бројеве које броји $f(d)$ из текста задатка и B скуп узајамно простих са n, мањих од n. Посматрајмо скупове $C_d = A_{\frac{n}{d}} \cdot d$, и докажимо да се сваки број од 1 до n појављује бар 2 пута у скуповима C_d или B, из чега решење непосредно следи.
Нека је $a \in \{1, 2, \cdots, n\}$ и $d = \mathrm{NZD}(a, n)$. Сада, можемо да видимо да очито важи $a \in C_d$, јер $\mathrm{NZD}(\frac{a}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. Такође, ако прост број $p|d$, онда $\mathrm{NZD}(\frac{a}{\frac{d}{p}}, \frac{n}{\frac{d}{p}}) = p$, па $a \in C_{\frac{np}{d}}$. Најзад, ако $d = 1$, онда по дефиницији $a \in B$. Стога, ако је $d = 1$, онда $a \in C_1$ и $a \in B$, а ако $d > 1$ и прост $p|d$, онда $a \in C_d$ и $a \in C_{\frac{d}{p}}$, па је заиста сваки број у барем 2 од наведених скупова и тражена једнакост је доказана.
Да би важила једнакост, мора да се сваки број појављује тачно два пута. Видимо да ако постоје два проста броја p, q тако да $p, q|n$, онда се n појављује у $C_n, C_{\frac{n}{p}}$ и $C_{\frac{n}{q}}$, па се једнакост не достиже. Стога, једнакост може да се достигне само за p^α. Заиста, за сваки број облика p^α се достиже, јер $f(1) = 1$, $f(p) = p$ и $f(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-2}$, за $\alpha > 1$, па

$$\sum_{d|p^\alpha} f(d) + \varphi(p^\alpha) = 1 + p + (p^2 - 1) + (p^3 - p) + \cdots + (p^\alpha - p^{\alpha-2}) + \varphi(p^\alpha) =$$

$$= p^\alpha + p^{\alpha-1} + p^\alpha - p^{\alpha-1} = 2p^\alpha = 2n.$$

Друго решење: Наћи ћемо формулу за $f(n)$ преко вредности $\varphi(n)$. Приметимо да је за фиксиран број $d|n$, број бројева $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$, тако да $\mathrm{NZD}(x, n) = d$, једнак $\varphi(\frac{n}{d})$. Ако посматрамо бројеве $d, 2d, \cdots, \frac{n}{d}d$, треба да важи $(kd, \frac{n}{d}d) = d(k, \frac{n}{d}) = d$, тј. да је $(k, \frac{n}{d}) = 1$, па је тај број заиста $\varphi(\frac{n}{d})$. Из овога, сада, следи да је

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

(ово је генерално познато), као и

$$f(n) = \varphi(n) + \sum_{p|n, p \text{ prost}} \varphi(\frac{n}{p}).$$

Сада нам је циљ да покажемо колико се пута неки сабирак $\varphi(d)$ појављује (ако се сваки појављује 2 пута, готови смо јер им је сума n). Очито се сваки појављује бар једном, јер је $f(d) = \varphi(d) + \cdots$. Сада, ако посматрамо $d|n$, ако важи да $p|\frac{n}{d}$, онда се сабирак $\varphi(d)$ појављује у суми $f(dp)$, јер $dp|n$. Ако урачунамо да имамо још један $\varphi(n)$, то значи да се сваки сабирак појављује бар 2 пута, па је тврђење доказано. Доказ случаја једнакости је исти као у првом делу.

5. Посматраћемо игру уназад, где у једном потезу узимамо два броја $x + 1$ и $x - 1$, која мењамо са 2 инстанце броја x. Очито је да је доказивање да се ова игра завршава за $\frac{n^3}{6}$ потеза еквивалентна са доказивањем да се почетна игра завршава за $\frac{n^3}{6}$ потеза. Поделићемо све почетне бројеве на табли на компоненте, тако да су два броја a и b у истој компоненти, ако постоји низ $a = c_1, c_2, \ldots, c_k = b$ почетних бројева на табли, тако да важи $|c_i - c_{i+1}| \leqslant 2$ (у суштини компоненте су поднизови који се добију од низа сортираних бројева, где тај низ "ломимо" кад год је разлика преко 2). Ово значи да у свакој компоненти, ако су на почетку бројеви $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_k$, важи $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant a_k + 2$. Очигледно бројеви из различитих компнетни никад неће моћи да интерагују, па је довољно доказати да је у једној компоненти највише $\frac{k^3}{6}$ потеза, из чега ће тврдња задатка следити, због $(x+y)^3 > x^3+y^3$. Компоненте се могу раздвајати на више компоненатa.

Нека су нам почетне вредности у једној компоненти $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_k$. Посматрајмо вредност суме квадрата унутар једне компоненте. У једном потезу ова вредност се смањује за $(x+1)^2+(x-1)^2-2x^2=2$. Приметимо да се сума бројева у једној компоненти не мења. Стога, на основу неједнакости између квадратне и аритметичке средине, важи да је сума квадрата на крају барем $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2$. Стога, број потеза S нам је највише био

$$S \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2\right) =$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2.$$

Ако је $k_i = a_{i+1}-a_i$, из чињенице да је $0 \leqslant k_i \leqslant 2$, видимо да је

$$S \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sum_{t=i}^{j-1} k_t)^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sum_{t=i}^{j-1} 2)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)\cdot(2i)^2) = \frac{2}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^3\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{(n-1)n^2(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4}\right) = (n-1)n\left(\frac{2n-1}{3} - \frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)(n+1)n}{6} < \frac{n^3}{6},$$

чиме је доказ завршен.

6. Одредићемо све вредности α за које се ниједан од бројева $p, 2p, \ldots, 2qp$ не појављује у низу $([n\alpha])_{n\in\mathbb{N}}$.За почетак, мора бити $\alpha > 2$. Заиста, постоји $s < pq$ такво да $p|s$ и $q|s+1$, а низ $([n\alpha])_{n\in\mathbb{N}}$ би морао да прескочи и s и $s+1$, што је немогуће за $\alpha \leqslant 2$. Разликоваћемо два случаја: (1°) $[\dfrac{2p}{\alpha}] = 2m+1$ је непарно. Очигледно је тада $m > \dfrac{p-1}{2}$. Стога, мора бити $(2m+1)\alpha > 2p$, тј. $(2m+1)\alpha \geqslant 2p+1$. Нека је i такво да је $i-1 \leqslant \dfrac{\alpha-1}{p-m\alpha} < i$, односно

$$(im+1)\alpha < ip+1 \quad \text{и} \quad (im-m+1)\alpha \geqslant ip-p+1.$$

Међутим, како је $\alpha < 3$, то је $\alpha \geqslant \dfrac{2p+1}{2m+1} \geqslant \dfrac{p-1}{m}$, па је $m\alpha \geqslant p-1$, што у збиру са другом неједнакошћу даје $(im+1)\alpha \geqslant ip$, одакле следи $[(im+1)\alpha] = ip$. По претпоставци мора бити $i \geqslant 2q$, одакле следи

$$\frac{(2q-1)p+1}{(2q-1)m+1} \leqslant \alpha < \frac{p}{m}.$$

(2°) $[\dfrac{2p}{\alpha}] = 2m$ је парно. По претпоставци је $m\alpha \geqslant p+1$. Као и у случају (1°), бирамо непарно i тако да је $i-2 \leqslant \dfrac{\alpha-2}{2p-(2m-1)\alpha} < i$. Тада је

$$\frac{i(2m-1)+1}{2}\alpha < ip+1 \quad \text{и} \quad \frac{(i-2)(2m-1)+1}{2}\alpha \geqslant (i-2)p+1.$$

Међутим, како је $\alpha \geqslant \dfrac{p+1}{m} \geqslant \dfrac{2p-1}{2m-1}$, то сабирање друге неједнакости са $(2m-1)\alpha \leqslant 2p-1$ даје $\dfrac{i(2m-1)+1}{2}\alpha \geqslant ip$, одакле следи $[\dfrac{i(2m-1)+1}{2}\alpha] = ip$. По претпоставци је $i \geqslant 2q+1$, па је

$$\frac{2p(2q-1)+2}{(2m-1)(2q-1)+1} \leqslant \alpha < \frac{2p}{2m-1}.$$

У оба случаја, ако је $a = [\frac{2p}{\alpha}]$, ће важити (за $\varepsilon \in \{1, 2\}$, у зависности од парности броја a)

$$\frac{a}{p} < \frac{2}{\alpha} \leqslant \frac{(2q-1)a+\varepsilon}{(2q-1)p+1} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{2-\frac{a}{p}}{(2q-1)p+1}.$$

Ако притом у низу $[\alpha], [2\alpha], \ldots$ нема ни бројева мањих од $2pq$, дељивих са q, онда за $b = [\frac{2q}{\alpha}]$ ће важити

$$\frac{b}{q} < \frac{2}{\alpha} \leqslant \frac{b}{q} + \frac{2-\frac{b}{q}}{(2p-1)q+1}.$$

Међутим, ако је, без умањења општости, $\frac{a}{p} < \frac{b}{q}$, тада је

$$\frac{1}{pq} \leqslant \frac{b}{q} - \frac{a}{p} \leqslant \frac{2-\frac{a}{p}}{(2q-1)p+1} < \frac{2-\frac{a}{p}}{(2q-1)p},$$

што се своди на $\frac{1}{q} > \frac{a}{p} \geqslant \frac{1}{p}[\frac{2p}{3}] \geqslant \frac{1}{2}$, што је немогуће.